VOL 31, NÚMERO 2, AÑO 2018

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES REALES EN VARIAS VARIABLES ASISTIDO POR EL GEOGEBRA

Maritza Luna Valenzuela, Elton John Barrantes Requejo
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
luna.m@pucp.edu.pe, ejbarran@pucp.edu.pe

Resumen
Entre estudiantes de Economía e Ingeniería es común escuchar las preguntas ¿cuál es el precio para obtener un ingreso máximo?, ¿cómo hallar la menor distancia entre dos objetos? Para dar respuesta a estas cuestiones en este taller se presentarán actividades que permiten a los participantes de nivel superior generar en el sentido de Rabardel (1995), la génesis instrumental del concepto de optimización de manera geométrica para funciones reales de dos variables, mediante la aplicación del teorema de Lagrange con el uso del software GeoGebra. A través de la socialización de resultados obtenidos se espera una actitud reflexiva valorando la formación de un instrumento.

Palabras clave: Optimización de funciones, Teorema de Lagrange, Génesis Instrumental

Abstract
It is common to hear students of Economis and Engineering ask questions like, "What is the price to obtain a maximum income?" or "How can we find the shortest distance between two objects?" To answer these questions, in this workshop, higher education students will show activities that allow them to generate, in the sense of Rabardel (1995), the instrumental genesis of the concept of geometric optimization for real functions of two variables by applying the Lagrange theorem with the use of GeoGebra software. By socializing the obtained results, a reflexive attitude is expected, valuing the formation of an instrument.

Key words: optimization of functions, Lagrange theorem, instrumental genesis

Introducción

Existen problemas de optimización en los cuales se pretende obtener los valores extremos de una función sin añadir condición alguna. Sin embargo, se pueden plantear problemas de obtención de extremos de una función, de manera que estos cumplan determinadas condiciones (o restricciones). La gran mayoría de problemas que se presentan en la realidad son de extremos con restricciones. Por ejemplo, una empresa tratará de maximizar las ganancias, pero estará condicionada por la cantidad de mano de obra necesaria, la materia prima disponible, etc.

Nosotros estamos interesados en resolver problemas de optimización con una restricción de manera geométrica, para dar solución a estos problemas utilizaremos el teorema de Lagrange con ayuda del GeoGebra. El problema consiste en determinar los valores extremos de una función $z=f(x,y)$, llamada función objetivo, sujeto a una restricción dada por una ecuación de la forma $g(x,y)=k$ (Larson, 2010).

En algunas situaciones necesitamos obtener los valores extremos de una función cuyo dominio está restringido a cierto subconjunto del plano (por ejemplo a lo largo de una curva). En este trabajo, se exploró un poderoso método para determinar los valores extremos de funciones restringidas: ***el método de multiplicadores de Lagrange*** (Stewart, 2008).

Marco Metodológico

Teniendo en cuenta que en la actualidad entre los enfoques en relación con la integración de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se encuentran: la Aproximación Instrumental, la Mediación Semiótica, la Orquestación Instrumental y el Enfoque Seres humanos con medios (Pérez, 2014).

La aproximación instrumental, que es resultado de la concatenación de dos teorías, la Ergonomía Cognitiva de Rabardel (2011) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999), se preocupa por los aspectos instrumentales de la actividad de uso de una herramienta tecnológica por parte del sujeto en un contexto educativo, y se produce con el fin de legitimar las prácticas educativas emergentes del uso de una herramienta tecnológica por parte de un estudiante en un contexto educativo.

En este taller tomamos en cuenta aspectos del enfoque instrumental, (Rabardel, 2002), ya que nuestro objetivo es enriquecer de manera progresiva el significado del teorema de Lagrange.

El término artefacto, utilizado por Rabardel (2011), se emplea para referirse a una cosa susceptible de uso, que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales. El cual no restringe el significado a las cosas materiales, permite incluir en la categoría artefacto a formas de otra naturaleza como los objetos simbólicos. Según Rabardel (2011) un artefacto junto con las habilidades del sujeto en su utilización, forman lo que es denominado como instrumento. De acuerdo a Rabardel (1995), denominó a la transformación progresiva del artefacto en instrumento como Génesis Instrumental. En este caso, el artefacto es el teorema de Lagrange y la génesis estará básicamente orientada a la instrumentalización de dicho teorema.

Propósitos y alcance

El taller se basó en implementar el significado del teorema de Lagrange en la práctica docente de la enseñanza de la matemática, de modo que el participante estableció un nexo entre los conceptos de optimización, propiedades y sus aplicaciones en economía e ingeniería.

Metodología

El taller estuvo orientado a docentes de nivel superior con nivel intermedio de conocimientos del GeoGebra. En el taller se planteó problemas intra y extra matemáticos y se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se presentaron actividades para que los participantes construyeran funciones con dos variables y exploren la optimización mediante las representaciones gráficas utilizando el GeoGebra. En este apartado, el participante inició el proceso de instrumentalización del teorema. En la segunda sesión se resolvieron problemas de aplicación en búsqueda de un ligero uso del instrumento. En cada sesión compartieron las soluciones en conversaciones con los demás participantes para identificar y analizar elementos que nos permitan dar soluciones a los problemas planteados.

Los trabajos se sustentaron en la instrumentación (Rabardel, 1999) así tenemos: a) Se compartió en parejas la solución del problema y las diversas respuestas a la pregunta “¿cómo halló el máximo si …?”, efectuadas por cada pareja; b) Se observó la correcta aplicación de teorema de Lagrange a problemas de economía e ingeniería y la interpretación de los resultados; c) Se describió el proceso de solución del problema, d) Evaluar el proceso de instrumentalización.

Para resolver los problemas de valores extremos se consideró la siguiente definición.

Definición. Sea $z = f(x, y)$ una función definida en U, subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, que contiene el punto (a, b). Entonces,

a) $f(a,b)$ es un *valor máximo local* de f si $f(a,b) \geq f(x,y)$, para todos los puntos $(x,\ y)$ en un disco abierto con centro en (a,b).
b) $f(a,\ b)$ es un *valor mínimo local* de f si $f(a,b) \leq f(x,y)$, para todos los puntos $(x,\ y)$ en un disco abierto con centro en (a,b).

El método para determinar los valores extremos de funciones restringidas es el siguiente:

El método de multiplicadores de Lagrange

El método dice que los valores extremos de una función $f(x,y)$, cuyas variables están sujetas a una restricción $\mathcal{C}$: $g(x,y) = c$, se encuentran sobre la curva $\mathcal{C}$ en los puntos donde

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar λ (llamado multiplicador de Lagrange).

Para explorar geométricamente el método y saber por qué funciona establecemos los siguientes teoremas:

Teorema del gradiente ortogonal. Suponga que $z = f(x,y)$ es una función derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave $\mathcal{C}: c(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \in I$.

Si P_0 es un punto de $\mathcal{C}$ donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre $\mathcal{C}$, entonces ∇f es ortogonal a $\mathcal{C}$ en P_0.

Teorema de Lagrange. Supongamos que f y g son dos funciones de dos variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas y que f tiene un extremo en $P(x_0, y_0)$ sobre la curva de restricción $g(x,y) = k$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ entonces existe un número λ tal que
$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Actividades del taller

Actividad 1. Grafique $f(x,y) = x^2 + y^2$ *y sus curvas de nivel.*

Para la solución siguieron el siguiente proceso:
Paso 1. **E**n la barra de entrada (en vista 3D) digitar $f(x,y) = x\hat{}2 + y\hat{}2$.
Paso 2. Generar un deslizador para k=0, 1, 2, ... , 10.
Paso 3. Graficar el plano z=k.
Paso 4. Intersecar el plano con la superficie (inicie rastro).
Paso 5. Simular la proyección de las curvas de nivel, con $x\hat{}2 + y\hat{}2$ =k (inicie rastro).
Teniendo como resultado la figura 1.

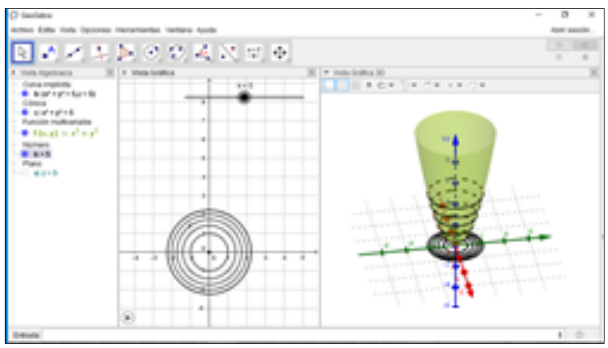

Figura 1. Superficie $f(x,y) = x^2 + y^2$ y sus curvas de nivel. (Elaboración propia)

Actividad 2. *Grafique la curva* $x + y = 1$ *e intersecte con la superficie* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *y también con el plano z*=0. *¿podria indicar cuál el punto minimo de la curva sobre la superficie de f*?

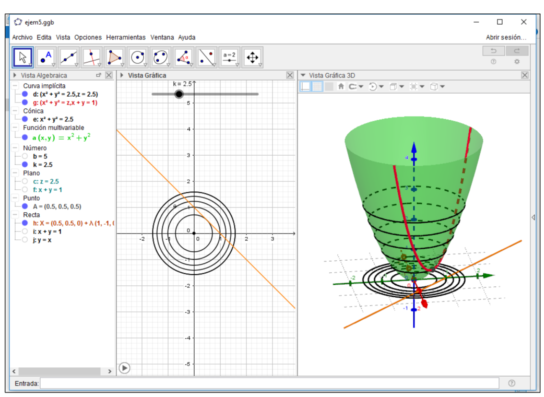

Figura 2. Curva en la superficie $f(x,y) = x^2 + y^2$ y proyección en el plano XY. (Elaboración propia)

El dinamismo del GeoGebra permite la visualización de la curva sobre la superficie del paraboloide, así inicia la exploración para buscar el punto mínimo en la curva generando la necesidad de buscar herramientas para lograr este objetivo, más aún, si los situamos en un problema de contexto como se muestra a continuación.

Actividad 3:
Determine los puntos de la curva 17x^2+12xy+8y^2=100 que están más cerca y más lejos del origen.

Solución
Encontrar el máximo o el mínimo de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es equivalente a hallar el máximo o el mínimo de $f(x,y)=x^2+y^2$. y el problema en traduce a lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{Máx y Mín } z = x^2+y^2 \\ \text{Sujeto a: } 17x^2+12xy+8y^2=100 \end{cases}$$

Se siguen los pasos siguientes:

Paso 1. Graficar la función $f(x,y)=x^2+y^2$.
Paso 2. Graficar la restricción ingresando en la barra de entrada 2D la ecuación
$17x\text{^}2+12xy+8y\text{^}2=100$.
Paso 3. Graficar la función objetivo ingresando en la barra de entrada 3D la ecuación
$f(x,y)=x\text{^}2+y\text{^}2$.

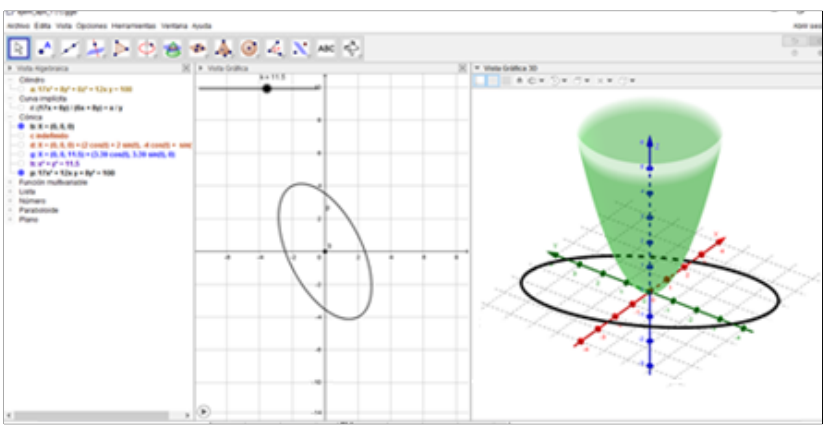

Figura 3. Superficie $f(x,y)=x^2+y^2$ y sus curvas de nivel. (Elaboración propia)

Paso 4. La gráfica de las curvas de nivel de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ ya se trabajó en Figura1.
Paso 5. En la vista 2D del GeoGebra busque los puntos donde la curva de nivel de la función es tangente a la restricción.

El primer caso puede visualizarse en la Figura 4.

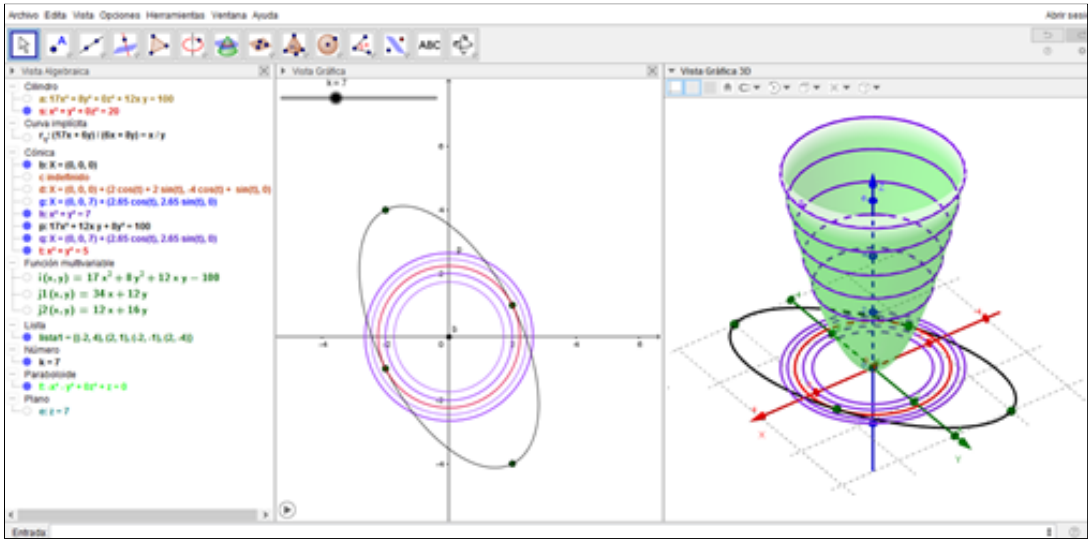

Figura 4. Curva de nivel de la función es tangente a la restricción. (Elaboración propia)

El segundo caso puede visualizarse en la Figura 5.

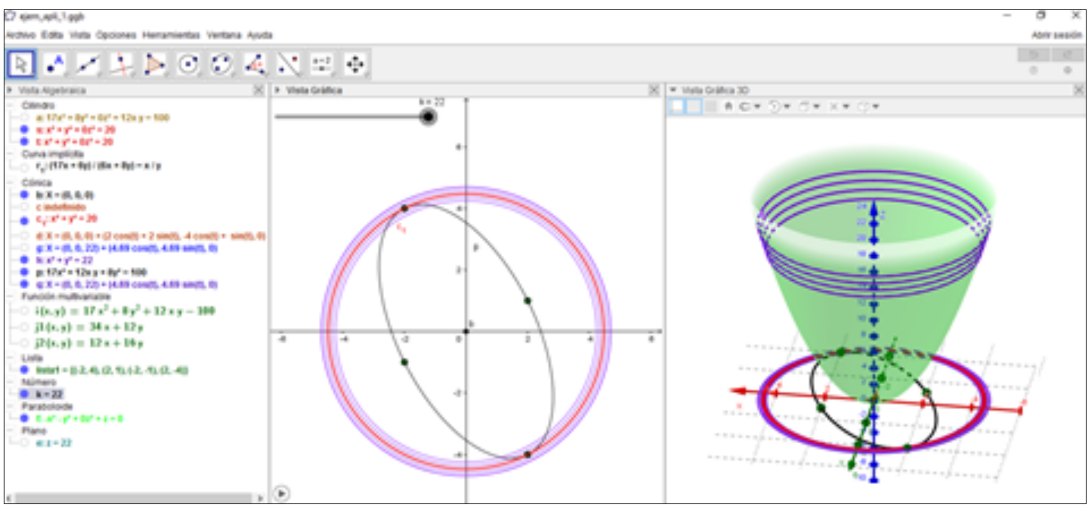

Figura 5. curva de nivel de la función. (Elaboración propia)

Paso 5. Según las gráficas mostradas en el paso 4, primer caso, notamos que las gráficas de la curva de nivel de la función con la restricción se intersecan tangencialmente en dos puntos $(-2;\ -1)$ y $(2;\ 1)$. Por el teorema de Lagrange afirmamos que existen dos puntos sobre la curva cuya distancia al origen es $\sqrt{5}$ unidades, y ésta resulta ser la menor distancia que hay entre puntos de la curva y el origen de coordenadas.

De manera similar, en el segundo caso, notamos que las gráficas de la curva de nivel de la función con la restricción se intersecan tangencialmente en dos puntos $(-2;\ 4)$ y $(2;\ -4)$. Por el teorema de Lagrange afirmamos que existen dos puntos sobre la curva cuya distancia al origen es $\sqrt{20}$ unidades, y ésta resulta ser la mayor distancia que hay entre puntos de la curva y el origen de coordenadas.

Actividad 5.
Suponga que se tiene una fábrica que produce cierto tipo de dispositivo que requiere acero como materia prima. Los costos son predominantemente mano de obra, que cuesta \$20 por hora para los trabajadores y el propio acero, que cuesta \$170 por tonelada. Considere que los ingresos están dados por:

$$I(x,y) = 200\,x^{2/3}y^{1/3},$$

donde "x" representa las horas de trabajo e "y" las toneladas de acero. Si el presupuesto de la fábrica es de \$20 000, determine el máximo ingreso posible.

Solución.
El problema se reduce a:

$$\begin{cases} Maximizar \quad I(x,y) = 200x^{\frac{2}{3}}\,y^{\frac{1}{3}} \\ Sujeto\ a \quad 20x + 170y = 20\,000 \end{cases}$$

La grafica correspondiente a la función objetivo, la restricción y curvas de nivel tanto en GeoGebra 2D como 3D se muestra en la figura siguiente:

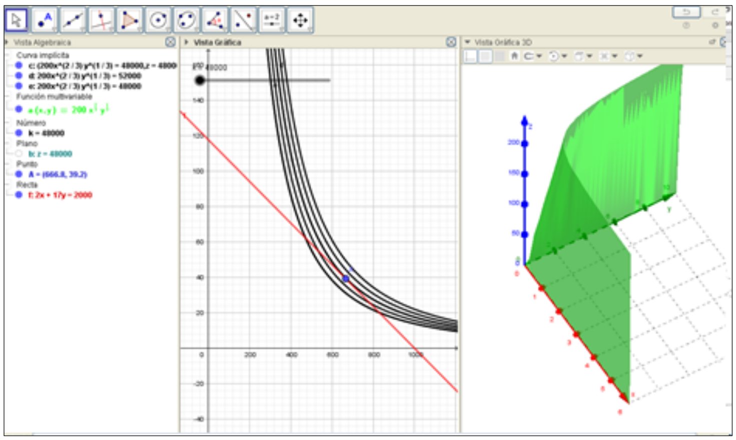

Figura 6. Curva de nivel de la función es tangente a la restricción y superficie. (Elaboración propia)

Según la gráfica, el valor máximo del ingreso se obtiene cuando $x \approx 667$ e $y \approx 40$ mientras que el ingreso máximo asciende a 52 215, 63 dólares.

Al concluir el taller se procedió a la evaluación del proceso de instrumentalización del teorema mediado por el GeoGebra donde una de las preguntas fue: ¿Cuándo utilizó el software GeoGebra que acciones se convierten progresivamente en un instrumento para resolver problemas de optimización? Algunas respuestas de los participantes se muestran en las figuras 6 y 7:

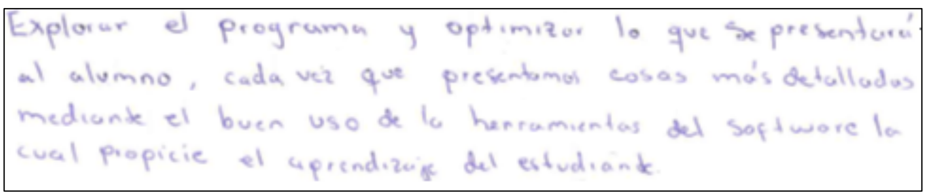
Explorar el programa y optimizar lo que se presentará al alumno, cada vez que presentamos cosas más detalladas mediante el buen uso de la herramientas del software la cual propicie el aprendizaje del estudiante.

Figura 7. Respuesta de participante. (Elaboración propia)

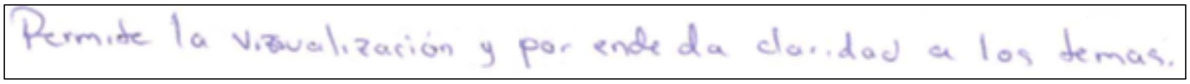
Permite la visualización y por ende da claridad a los demas.

Figura 8. Otra respuesta de participante. (Elaboración propia)

Figura 9. Participante mostrando la instrumentalización del teorema de Lagrange. (Elaboración propia)

Conclusiones

- La instrumentalización del artefacto se logró en su totalidad debido a la visualización en 3 dimensiones de propiedades y resultados que hechos a mano son tediosos y complejos de representar.
- El binomio conocimiento matemático (Teorema de Lagrange) y uso de tecnología digital (GeoGebra) permitió una orquestación en la resolución del problema de aplicación, como enfatizan Borba y Villarreal (2005) al afirmar que el uso de diferentes medios cambia las matemáticas producidas.
- Mediante la aplicación de Teorema de Lagrange se logró la génesis instrumental del concepto de optimización de manera geométrica para funciones reales de dos variables

Implicaciones

Consideramos importante profundizar y aplicar el Teorema de Lagrange para resolver problemas con más variables y con más restricciones pero estar asistido por un software tal como lo muestra Kong, Bances, Medina, Gonzales, Luna y Sanchez, (2014), y pueden ayudar a mejorar la formación docente y reflexionar sobre su práctica matemática.

Referencias bibliográficas

Borba, M. y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Kong, M., Bances, R., Medina, N., Gonzales, M., Luna, M. y Sanchez, R. (2014). *Optimización restringida a un* *sistema polinomial.* Departamento de Ciencias- Pontificia Universidad Católica del Perú. Serie B, Nº 31 (pp 29-33).

Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. McGRAW-Hill/Interamericana Editores, novena edición.

Pérez, C. (2014). Perspectiva Educacional, *Formación de Profesores*, *53*, (2), 129-150.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10e Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, pp 203-213.

Rabardel, P. (2002). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Univ. Paris 8. [traducción al inglés: Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Paris: Univ. Paris 8].

Stewart, J. (2008). *Calculus: Early trascendentals*. Thomson Brooks/Cole Sixth edition.